UNIVERSITÉ D'ORLEANS
UFR Sciences

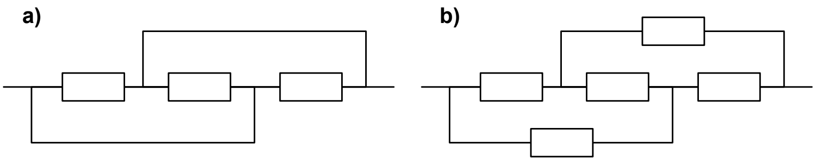
Année universitaire 2007-2008
Licences de Physique & Chimie, 1ère année

SCL1PY01 ELECTRICITÉ

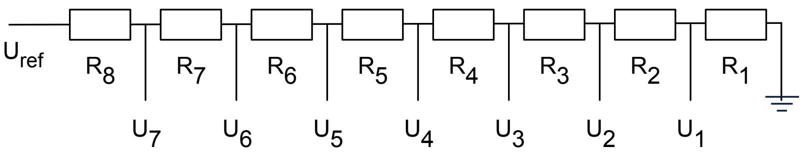
Exercices d'Electricité

1 Electrocinétique et résistances

1.1 Calculez la résistance équivalente de ces deux circuits. Toutes les résistances ont la même valeur R.



1.2 Le circuit ci-dessous, appelé pont diviseur de tension, est couramment utilisé dans des convertisseurs analogique-numérique rapides. Sachant que les résistances sont identiques, déterminez la valeur des tensions $U_1, U_2, \ldots, U_7$.



1.3 Vous disposez d'un lot de résistances valant toutes exactement $10k\Omega$. a) Comment faut-il les assembler pour réaliser une seule résistance équivalente de $7.5k\Omega$? b) Et pour obtenir une résistance de $15.7143k\Omega$?

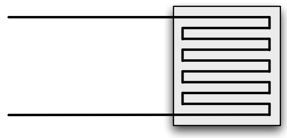
1.4 Un tube en aluminium de longueur $l = 2\ m$ possède un rayon intérieur $r_1 = 4\ mm$ et un rayon extérieur $r_2 = 6\ mm$. La résistivité de l'aluminium vaut $\rho = 2.5 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot m$. Quelle est la résistance de ce tube ?

1.5 Un câble électrique de section 0.5 mm^2 possède une résistance de 4 Ω. Quelle sera sa résistance si on le remplace par un câble de section 1 mm^2 ?

1.6 Une bobine est constituée d'une couche unique de $N = 800$ spires jointives en cuivre, qui sont enroulées sur un cylindre isolant de diamètre $D = 1\ cm$. Le diamètre du fil de cuivre est $d = 0.6\ mm$. Quelle est la résistance de cette bobine, sachant que la résistivité du cuivre vaut $\rho = 1.6 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot m$? Chaque spire est isolée de ses voisines.

1.7 Un câble en cuivre de 150 m de longueur doit être remplacé par un câble en constantan. Ce dernier est un conducteur qui a la particularité d'avoir un très faible coefficient de dilatation thermique. De combien faudra-t-il augmenter ou diminuer l'épaisseur du conducteur pour que la résistance du câble reste la même ? La résistivité du constantan vaut $\rho = 49 \times 10^{-8}\ \Omega$·m et celle du cuivre est $\rho = 1.7 \times 10^{-8}\ \Omega$·m.

1.8 Les jauges de contrainte sont couramment utilisées pour mesurer la déformation d'un corps solide. On peut en réaliser une en moulant un conducteur fin dans une matière élastique. Sous l'effet de la contrainte, la longueur du conducteur varie et la valeur de la résistance également. Cette dernière nous renseigne donc sur le taux de déformation.

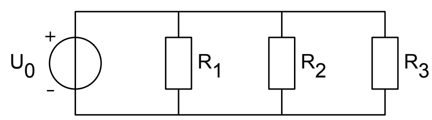


Dans quelle direction faut-il déformer la jauge pour que sa sensibilité soit maximale ? Si la jauge se déforme de $\Delta l / l \ll 1$ (suivant la direction où sa sensibilité est maximale, l étant la longueur de la jauge et non du fil), de combien la résistance $\Delta R / R$ variera-t-elle ? On supposera que la section du fil reste constante lors de la déformation.

1.9 Un générateur de tension, de résistance interne $r = 8\ \Omega$ délivre une tension u dans une charge de résistance R. Calculez la puissance P_c dissipée dans cette charge et comparez-la à la puissance P_g fournie par le générateur. Esquissez P_c en fonction de R. Pour quelle valeur de R, sa valeur est-elle maximale ?

Ceci est un problème d'adaptation d'impédance, qui joue un rôle important dans de nombreux systèmes et notamment dans l'adaptation d'un haut-parleur à son amplificateur.

1.10 Déterminez la puissance dissipée dans chaque résistance de ce circuit. On donne $U_0 = 120\ V$, $R_1 = 4\ k\Omega$, $R_2 = 8.2\ k\Omega$, et $R_3 = 2\ k\Omega$.



1.11 Pour effectuer une électrolyse, un générateur délivre un courant d'intensité 5 A, sous une tension de 10 V, et fonctionne pendant 10h.

1. Quelle quantité d'électricité circule dans les fils d'alimentation de l'électrolyseur ?
2. Les porteurs de charge dans les fils d'alimentation sont des électrons. Combien d'électrons ont circulé pendant cette charge ?
3. Dans l'électrolyte, en revanche, les porteurs de charge sont à la fois des électrons et des ions. Le nombre d'électrons qui circulent y est-il supérieur ou inférieur à celui trouvé sous 2. ?

1.12 Un fil électrique de section droite $S = 1\ mm^2$ est parcouru par un courant d'intensité constante $I = 10\ A$. La densité volumique de porteurs est $n = 1.0 \times 10^{29} m^{-3}$ (la charge d'un électron vaut $q = -e = -1.6 \times 10^{-19} C$).

1. Que vaut la norme j de la densité de courant ?
2. Déterminez la vitesse moyenne des porteurs.

2 Caractéristiques

2.1 Un générateur de tension continue possède une force électro-motrice à vide de 3 V et une résistance interne de 2 Ω.

1. Tracez sa caractéristique et déterminez son courant de court-circuit ;

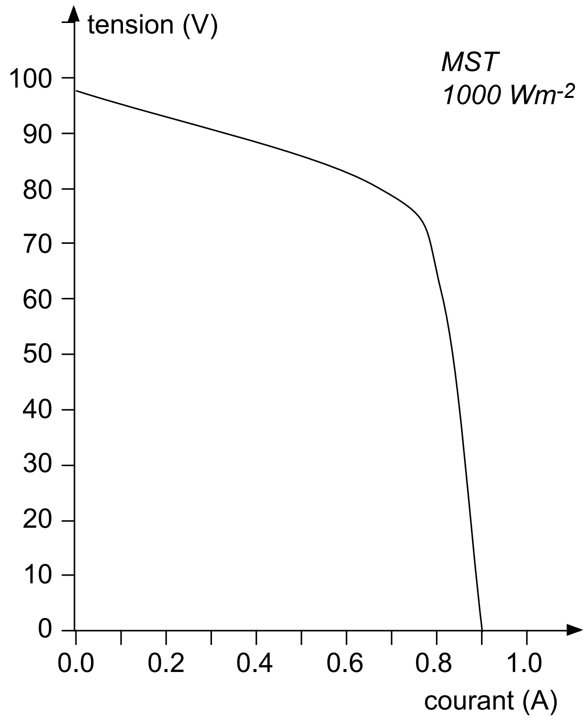
2. Quelle tension générera-t-il si on branche à sa sortie une charge de $R = 3\,\Omega$?
3. Tracez sur le même graphe la caractéristique d'un *générateur de courant* de même résistance interne mais dont le courant à vide vaut 1 A.

2.2 Une batterie de voiture possède une force électro-motrice à vide de 12 V et un courant de court-circuit de $60A$.

1. Déterminez sa résistance interne et tracez sa caractéristique.
2. Déterminez *graphiquement* la tension mesurée à ses bornes lorsque l'intensité du courant débité vaut $3A$.

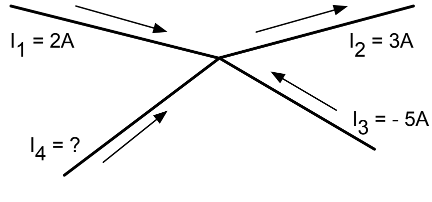
2.3 La figure ci-contre montre la caractéristique d'une cellule photovoltaïque de grande surface, dans des conditions d'ensoleillement favorables, et à température ambiante.

1. Cette cellule s'apparente-t-elle davantage à une source de tension ou à une source de courant ?
2. Estimez la force électro-motrice et la résistance interne du générateur de Thévenin équivalent (dans l'approximation des tensions pas trop élevées).
3. Quand la puissance délivrée par cette cellule est-elle maximale ? Pour U élevé, pour I élevé, ou autre ?



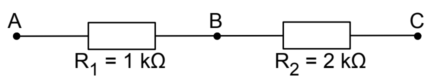
3 Lois de simplification

3.1 Quelle est l'intensité du courant I_4 dans ce circuit ?

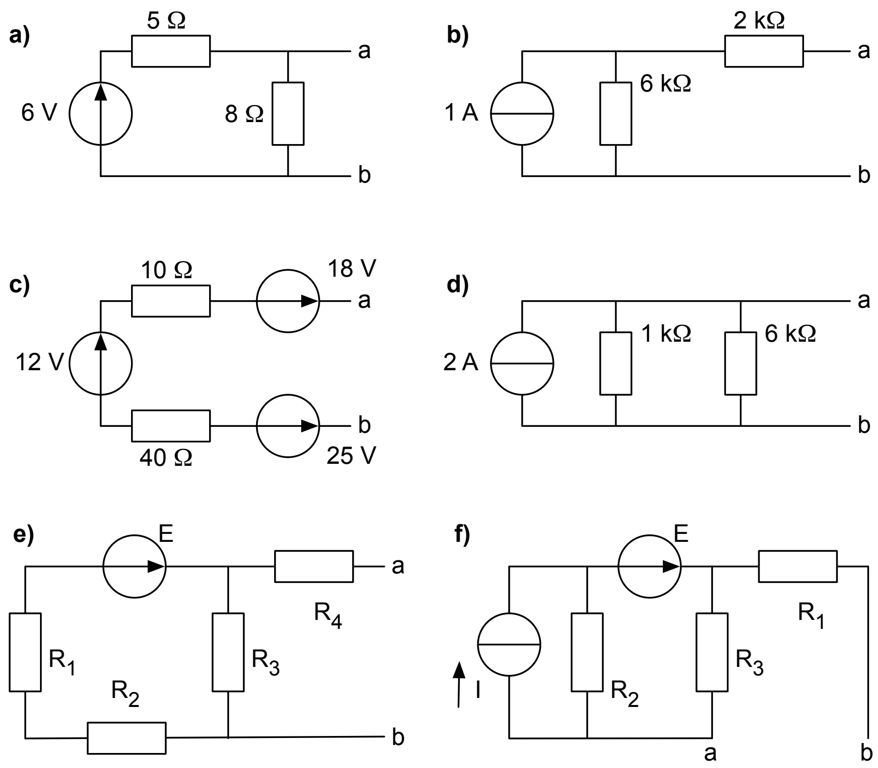


3.2 Déterminez V_B pour les cas suivants

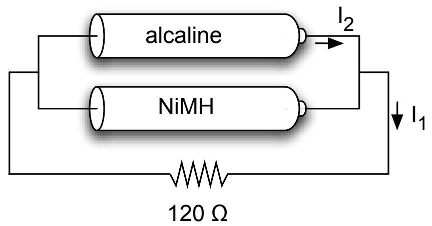
1. $V_A = -4\ V$ et $V_C = 12\ V$
2. $V_A = -4\ V$ et $V_C = -12\ V$



3.3 Calculez pour chacun des circuits suivants les générateurs équivalents de Thévenin et de Norton entre les points a et b.

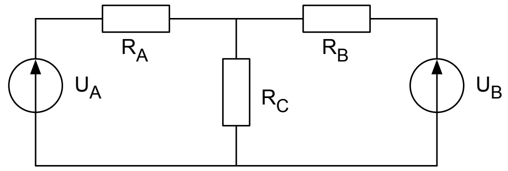


3.4 On entend souvent dire qu'il ne faut pas mélanger des piles de types différents dans un même appareil. Pour le vérifier, branchons deux piles LR03 en parallèle. L'une est une pile alcaline dont la tension à vide et la résistance interne valent respectivement $1.5V$ et 0.4Ω. L'autre est un accumulateur NiMH de tension à vide $1.2V$ et de résistance interne 0.6Ω. Déterminez le générateur équivalent de Thévenin pour l'ensemble des deux piles ainsi que l'intensité I_1. Pourquoi n'est-il pas conseillé de les brancher ainsi ?



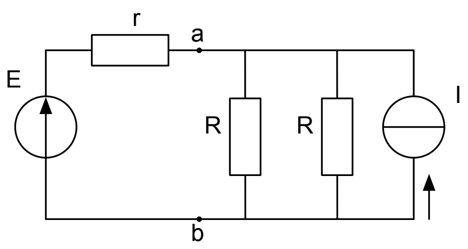
3.5 On cherche à déterminer le courant qui circule dans la résistance R_C lorsque $U_A = 4\ V$, $U_B = 12\ V$, $R_A = 1\ k\Omega$, $R_B = 6\ k\Omega$, et $R_C = 6\ k\Omega$. Déterminez ce courant en utilisant successivement :

1. la loi des noeuds et loi des mailles
2. le théorème de Thévenin

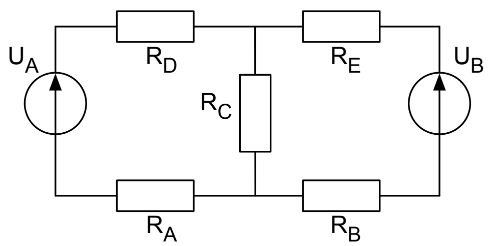


3.6 Déterminez la tension à vide E_{th} et la résistance interne r_{th} du modèle de Thévenin du dipôle actif linéaire situé à droite des bornes a et b. Déduisez-en le l'intensité i du courant qui parcourt la résistance r. Prenez $R = 6\Omega$, $I = 8A$, $E = 4V$ et $r = 2\Omega$.

Réponse : $r_{th} = 3\Omega$, $E_{th} = 24V$, $i = 4A$.



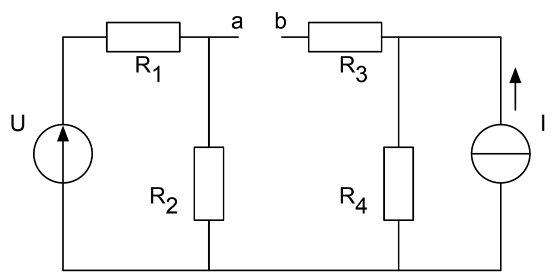
3.7 Déterminez la puissance dissipée dans la résistance R_C en utilisant le théorème de la superposition. On donne $R_A = R_D = 0.5\,\Omega$, $R_B = R_E = 3\,\Omega$, $R_C = 6\,\Omega$, $U_A = 4\ V$, et $U_B = 12\ V$.



3.8 Dans le circuit suivant, on veut calculer $V_a - V_b$, sachant que $U = 1$ V, $R_1 = R_3 = 1\,\Omega$, $R_2 = R_4 = 2\,\Omega$ et $I = 2$ A.

1. Commencez par déterminer le circuit équivalent, et insérez les valeurs numériques à la fin.
2. On branche ensuite entre a et b une résistance $R_5 = 1\,\Omega$. Calculez l'intensité du courant qui la traversera.

Réponse : 1) $V_a - V_b = -10/3V$*, 2)* $I = -5/7A$.



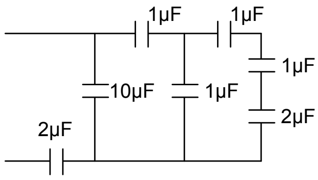
3.9 Un électrolyseur est alimenté par un générateur de force électro-motrice variable $0 \leq U_0 \leq 5\ V$ et de résistance interne $r = 2\,\Omega$. Cet électrolyseur se comporte comme un générateur de force contre-électro-motrice (qui s'oppose toujours à celle avec laquelle on l'alimente) dont la valeur E vaut

$$E = \begin{cases} 2.2\ V & \text{si } I > 0 \\ -2.2\ V & \text{si } I < 0 \end{cases}$$

où I est le courant qui le traverse. Déterminez :
– la tension minimale que doit fournir le générateur pour que l'électrolyse ait lieu
– la tension que doit fournir le générateur pour avoir un courant d'intensité 1 A.

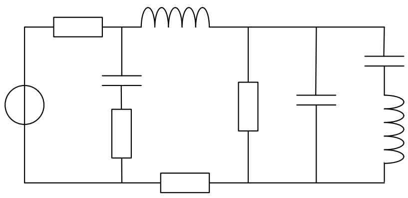
4 Condensateurs et inductances

4.1 Quelle est la capacité équivalente du dipôle ci-dessous ? *Réponse :* $C = 1.68\mu F$.



4.2 Déterminez le circuit équivalent du montage suivant dans les deux cas extrêmes où :

1. le régime est continu : la tension fournie par le générateur est constante
2. le régime est alternatif haute fréquence : la tension varie très rapidement



4.3 On charge un condensateur en le branchant à un générateur qui délivre une tension de 10 V. L'énergie ainsi accumulée vaut 0.0005 J.

1. Déterminez la charge accumulée dans le condensateur.
2. Combien d'électrons cela représente-t-il ?

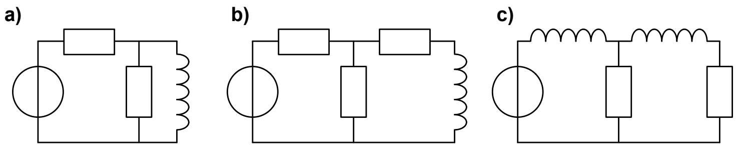
4.4 On alimente une self, d'inductance L, par un courant qui croît au cours du temps :

$$i(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ i_0 \frac{t}{T} & 0 \leq t \leq T \\ i_0 & t \geq T \end{cases}$$

– Déterminez l'évolution temporelle de la tension aux bornes de la self ainsi que la puissance qui doit être fournie.
– Quelle énergie la self a-t-elle accumulé entre $t = 0$ et $t = T$? Cette quantité dépend-t-elle de la rapidité avec laquelle on fait croître le courant (c'est-à-dire de T) ?

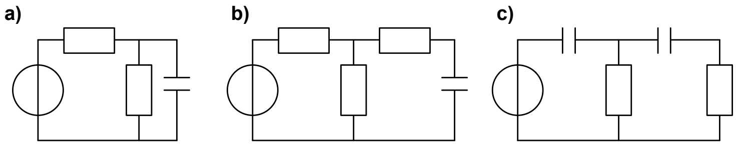
5 Circuits linéaires en régime permanent

5.1 Déterminer dans les montages ci-dessous l'intensité du courant circulant dans chaque bobine lorsque le régime permanent est établi. Les résistances sont identiques, de même que les inductances. On se place dans le cadre de l'approximation du régime permanent ; un temps infini s'est écoulé depuis le branchement de la source sur le circuit.



5.2 Même question, pour la (les) tension(s) aux bornes du (des) condensateur(s) lorsque le régime permanent est établi.

Réponses : a) $U_c = E/2$, *b)* $U_c = E/2$, *c)* $U_1 = E$, $U_2 = 0$



6 Nombres complexes

6.1 Trouvez l'expression analytique des parties réelle et imaginaire du quotient $(a+jb)/(c+jd)$ et appliquez cela au calcul de

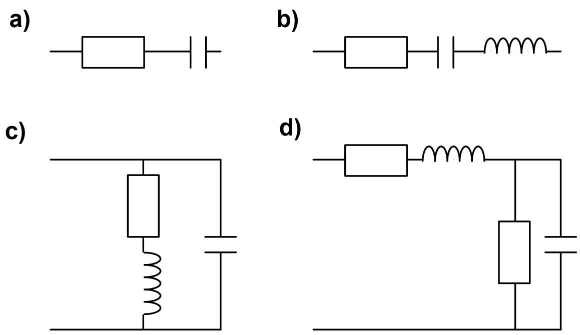
$$\frac{1}{j} \qquad \frac{1+j}{j} \qquad \frac{j}{2+3j} \qquad \frac{1+j}{\sqrt{3}-j}$$

6.2 Trouvez le module et l'argument des nombres complexes suivants

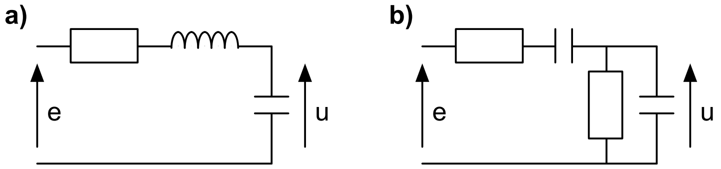
$$\underline{z} = -j \qquad \underline{z} = \sqrt{3}-j \qquad \underline{z} = 1+j \qquad \underline{z} = \frac{1}{2+j}$$

7 Calcul d'impédances

7.1 Déterminer l'impédance complexe $\underline{Z}$ des dipôles ci-dessous. En déduire l'impédance réelle Z_R ainsi que l'avance de phase ϕ de la tension sur le courant. Application : $R = L\omega = 4\Omega$ et $1/C\omega = 8\Omega$

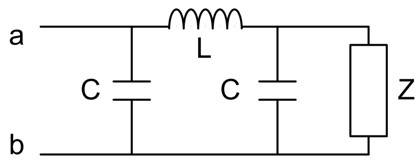


7.2 On étudie les circuits ci-dessous, où la tension appliquée est $\underline{e}$ en notation complexe. La tension est ensuite mesurée aux bornes du condensateur. Exprimez sa représentation complexe $\underline{u}$ en fonction de $\underline{e}$ pour chacun des cas.

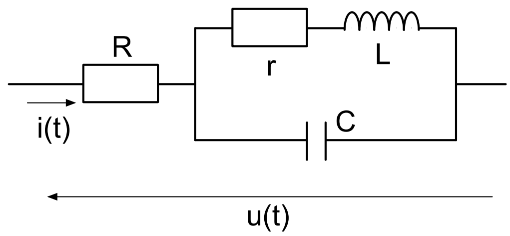


7.3 Quelle valeur $\underline{Z}_c$ faut-il donner à $\underline{Z}$ pour que l'impédance complexe d'entrée de ce réseau vue entre a et b soit égale à $\underline{Z}$? Quel(s) dipôle(s) faut-il utiliser pour $\underline{Z}$?

Réponse : on trouve $\underline{Z}_c^2 = L/(2C - LC^2\omega^2)$, dont il faut ensuite étudier le signe.



7.4 On étudie le dipôle ci-dessous dans le cas où $u(t) = 100\cos(1000t)$. Donnez l'expression numérique de l'intensité i sous la forme $i(t) = i_0 \cos(\omega t + \phi)$, sachant que $R = 2.5\Omega$, $r = 10\Omega$, $L\omega = 5\Omega$ et $1/C\omega = 5\Omega$.

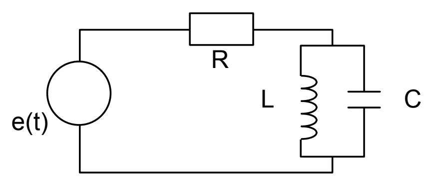


7.5 Une ligne à haute tension peut être approximée par une faible résistance R mise en série avec une faible inductance L. Cette ligne est ici alimentée par un générateur idéal qui produit une tension sinusoïdale, d'amplitude U_g. A l'autre extrémité de la ligne se trouve une charge résistive R_c.

1. Exprimez, en notation complexe, la tension $\underline{u}_c$ mesurée aux bornes de la charge ainsi que du courant $\underline{i}_c$ qui la traverse.
2. Quel est le déphasage entre $\underline{u}_c$ et $\underline{i}_c$?
3. Quel est le déphasage entre $\underline{u}_c$ et la tension $\underline{u}_g$ mesurée aux bornes du générateur ?
4. La tension dans la charge est-elle en avance ou en retard de phase sur celle du générateur ?

Réponses : 1) $\underline{u_c} = \underline{u_g} R_c/(R_c + R + j\omega L)$*, 2) le déphasage est nul, 3)* $\tan\phi = -\omega L/(R_c + R)$*, 4) elle est en retard de phase.*

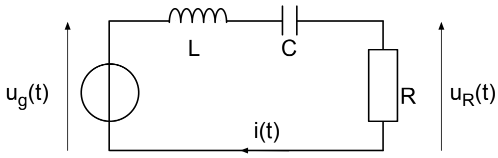
7.6 On considère le circuit RLC suivant



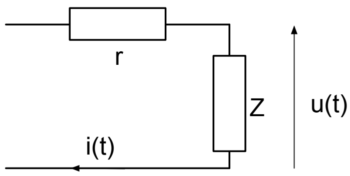
1. Calculez l'impédance complexe $\underline{z}(\omega)$ du circuit équivalent.
2. Montrez qu'à basse fréquence, le circuit se comporte comme un circuit R-L et à haute fréquence comme un circuit R-C.
3. Calculez l'impédance réelle $Z = |\underline{z}|$ de ce circuit. Pour quelle valeur de ω la valeur de Z est-elle maximale ? Que vaut l'intensité du courant pour cette valeur ?

8 Calcul de puissances

8.1 Dans le circuit suivant, déterminez la puissance active dissipée dans chacun des dipôles passifs, ainsi que le rendement $\eta = P_R/P_g$, où P_R est la puissance dissipée dans la résistance et P_g celle fournie par le générateur.

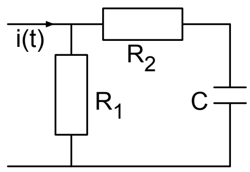


8.2 On dispose d'un circuit simple constitué d'un générateur sinusoïdal, placé en série avec une résistance r et un dipôle passif d'impédance complexe $\underline{Z} = R + jX$.



1. Exprimez, en notation complexe, la tension $\underline{u}_g(t)$ du générateur, l'intensité $\underline{i}(t)$ du courant circulant dans le dipôle, ainsi que la tension $\underline{u}(t)$ aux bornes de ce dernier.
2. On définit la puissance complexe $\underline{P}(t) = \underline{u}(t)\underline{i}^*(t)$, où $\underline{i}^*$ est le complexe conjugué de $\underline{i}$. Montrez pour ce circuit que la partie réelle de $\underline{P}$ est égale à la puissance active $P_c = \frac{1}{2}UI\cos\phi$, où U et I sont les amplitudes, respectivement de la tension réelle $u(t)$ aux bornes du dipôle et du courant réel $i(t)$ qui y circule, et où ϕ est le déphasage entre les deux.
3. Quelle est la puissance active P_g fournie par le générateur ?
4. Déterminez le rendement $\eta = P_a/P_g$ de ce montage.

8.3 On considère le montage ci-contre. La puissance consommée par le dipôle vaut 500 W. On donne $R_1 = 5\Omega$, $R_2 = 4\Omega$, et $1/C\omega = 4\Omega$.



1. Calculer la valeur efficace du courant i qui le traverse ;
2. Calculer la valeur de la puissance moyenne dissipée dans chacune des résistances.

8.4 Un moteur fonctionne sous une tension efficace $U = 20V$, de fréquence $f = 50Hz$. Il est modélisé par une résistance $R = 3\Omega$ en série avec une inductance L. L'intensité du courant circulant dans le moteur a pour valeur efficace $I = 4A$.

1. Déterminer l'inductance L, l'impédance réelle Z ainsi que la puissance P consommée par le moteur.
2. On place en parallèle avec le moteur deux ampoules consommant chacune une puissance de $8W$. Quel est le facteur de puissance (= cosinus du déphasage) de ce montage ?

8.5 Un générateur de tension sinusoïdale de pulsation ω possède une force électro-motrice (de valeur efficace E) et une impédance interne $\underline{Z}_i = R_i + jX_i$. Il alimente une impédance externe complexe $\underline{Z}_e = R_e + jX_e$.

1. A quelles conditions (sur R_e et sur X_e), la puissance dissipée dans $\underline{Z}_e$ est-elle maximale ?
2. Quels types de dipôles faudrait-il utiliser pour réaliser une telle impédance ?
3. Quelle est alors la valeur de la puissance P_e dissipée dans la charge extérieure $\underline{Z}_e$?

Réponse : $P_e = R_eE^2/[(R_i + R_e)^2 + (X_i + X_e)^2]$. *Il faut prendre* $\underline{Z}_e = R_i - jX_i$ *pour maximiser la dissipation.*

8.6 Une installation électrique est alimentée sous une tension efficace de $U = 220V$. Elle consomme une puissance $P = 15kW$. La fréquence utilisée est $f = 50Hz$ et l'intensité efficace dans le circuit est de $I = 80A$.

1. Sachant que l'installation est de type inductif, calculer les éléments constituant son impédance équivalente.
2. Calculer la capacité C à placer en parallèle sur l'installation pour relever le facteur de puissance à $\cos\phi = 0.9$.

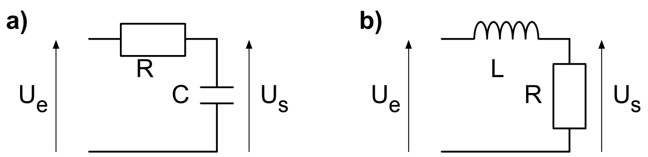
Réponse : $R = |\underline{Z}|\cos\phi = 2.34\Omega$ *et* $L = R\tan\phi/\omega = 4.62mH$. *Avec le condensateur en parallèle, on doit avoir* $\tan\phi = C\omega(R^2 + L^2\omega^2)/R - L\omega/R = \pm 0.46$, *d'où* $C = 8.05\mu F$.

9 Représentations de Bode

9.1 Pour les filtres ci-dessous, on a $R = 470\Omega$, $C = 340nF$ et $L = 74.8mH$. Les deux sont alimentés par une tension sinusoïdale de valeur efficace $U_e = 10V$. Pour chacun d'eux :

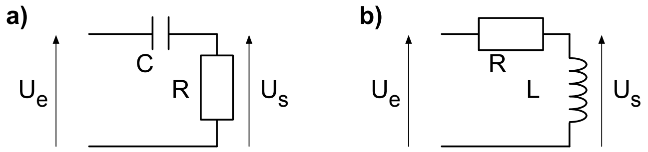
1. Tracez les diagrammes de Bode de la réponse en amplitude et de la réponse en phase.
2. Superposez sur les tracés les asymptotes correspondantes.
3. Déterminez la fréquence de coupure, et calculez l'atténuation et ainsi que la phase à la fréquence de coupure.
4. De quel type de filtre s'agit-il ?

a)	f [Hz]	100	250	500	1000	1250	1500	2000
	$\|Z\|$ [Ω]	4704	1930	1047	663	601	564	525
	U_R [V]	1.01	2.40	4.48	7.08	7.82	8.33	8.95
	U_C [V]	9.95	9.70	8.94	7.06	6.23	5.53	4.46
b)	$\|Z\|$ [Ω]	472	484	525	664	752	847	1051
	U_R [V]	9.95	9.70	8.94	7.07	6.25	5.55	4.47
	U_L [V]	0.99	2.42	4.47	7.07	7.80	8.32	8.94



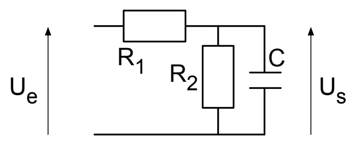
9.2 Même question qu'en 8.1 pour les circuits ci-dessous. On donne

a)	f [Hz]	100	250	500	1000	1250	1500	2000
	$\|Z\|$ [Ω]	4704	1930	1047	663	601	564	525
	U_R [V]	1.01	2.40	4.48	7.08	7.82	8.33	8.95
	U_C [V]	9.95	9.70	8.94	7.06	6.23	5.53	4.46
b)	$\|Z\|$ [Ω]	4704	1930	1047	663	601	564	525
	U_L [V]	1.01	2.40	4.48	7.08	7.82	8.33	8.95
	U_R [V]	9.95	9.70	8.94	7.06	6.23	5.53	4.46



9.3 Voici un autre type de filtre passe-bas du premier ordre. On donne $R_1 = R_2 = 1k\Omega$ et $C = 200nF$.

1. Déterminez l'expression analytique de sa fonction de transfert et calculez l'amplitude (en dB) ainsi que la phase.
2. Représentez les diagrammes asymptotiques d'amplitude et de phase.
3. Déterminez la fréquence de coupure, ainsi que l'atténuation et la phase à la fréquence de coupure.

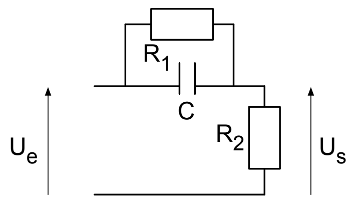


9.4 Le filtre suivant est appelé *filtre à avance de phase*. On donne $R_1 = R_2 = 100\Omega$ et $C = 1\mu F$.

1. Montrez que sa fonction de transfert peut s'écrire sous la forme

$$\underline{H}(\omega) = a\frac{1 + j\omega\tau_1}{1 + j\omega\tau_2}$$

2. Donnez les expressions de a, τ_1 et de τ_2.
3. Représentez les diagrammes asymptotiques d'amplitude et de phase.
4. Déterminez les fréquences de coupure, ainsi que l'atténuation et la phase aux fréquences de coupure.
5. Calculez la valeur de la pulsation correspondant au maximum du déphasage.

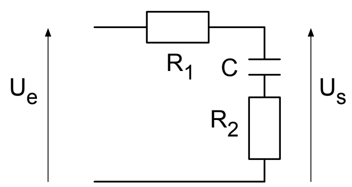


9.5 Le filtre suivant est appelé *filtre à retard de phase*. On donne $R_1 = R_2 = 100\Omega$ et $C = 1\mu F$.

1. Montrez que sa fonction de transfert peut s'écrire sous la forme

$$\underline{H}(\omega) = a\frac{1 + j\omega\tau_1}{1 + j\omega\tau_2}$$

2. Donnez les expressions de a, τ_1 et de τ_2.
3. Représentez les diagrammes asymptotiques d'amplitude et de phase.
4. Déterminez les fréquences de coupure, ainsi que l'atténuation et la phase aux fréquences de coupure.
5. Calculez la valeur de la pulsation correspondant au maximum du déphasage.

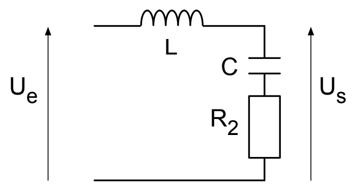


9.6 Quelle(s) incohérence(s) y'a-t-il dans cette expression de la fonction de transfert ?

$$\underline{H}(\omega) = (j\omega\tau_1)^3 \frac{1 + j\omega\tau_2}{1 + j\omega\tau_3} \frac{1 + j\tau_4}{1 + j\omega\tau_5} \frac{1}{(1 + j\omega\tau_6)^2} \frac{1 + \omega\tau_7}{1 + \omega\tau_8} \frac{-j + \omega\tau_9}{1 + j\omega\tau_{10}}$$

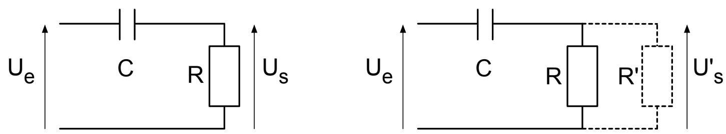
9.7 Le filtre ci-dessous est un *filtre sélectif*. On donne $R = 1\Omega$, $L = 0.5mH$ et $C = 2\mu F$.

1. Calculez sa fonction de transfert et déterminez sa fréquence caractéristique.
2. Tracez avec soin le diagramme de Bode (uniquement le gain).
3. A quelle fréquence $\underline{U}_s$ est-il en phase avec $\underline{U}_e$?



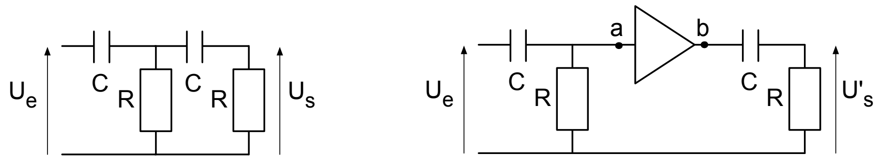
9.8 L'ajout d'une charge à la sortie d'un filtre modifie les caractéristiques de celui-ci.

1. Déterminez les fonctions de transfert $\underline{H}(\omega)$ et $\underline{H}'(\omega)$ des deux filtres ci-dessous.
2. Comparez les fréquences de coupure f_0 et f_0' de ces deux filtres ainsi que leurs gains (en [dB]) en régime permanent.
3. Dans quelle plage de valeurs faut-il choisir R' de telle sorte que l'écart relatif sur la fréquence $|f_0' - f_0|/f_0$ ne dépasse pas 10 % ?



9.9 On place deux filtres RC identiques en cascade.

1. Calculez la fonction de transfert $\underline{H}(\omega)$ de l'ensemble.
2. Tracez les valeurs asymptotiques du diagramme de Bode. Quelle est la pente du gain, en dB par décade ?
3. Vous verrez ultérieurement qu'on gagne à insérer dans ce filtre un amplificateur opérationnel (le filtre est alors dit *actif*). Un amplificateur idéal possède la faculté de fournir $V_a = V_b$ sans pour autant consommer de courant, c'est-à-dire $i_{ab} = 0$. Que devient la fonction de transfert en présence d'un tel amplificateur ?



filtre RC passif — filtre RC actif

9.10 Concevez un filtre passif simple qui atténue les fréquences inférieures à $f_1 = 100Hz$ ainsi que celles supérieures à $f_2 = 10kHz$, avec un gain qui varie asymptotiquement de $20dB$ par décade. Entre les deux fréquences de coupure, le gain doit être asymptotiquement égal à 0 dB.

Rappels sur les nombres complexes

Les nombres complexes sont abondamment utlisés en électricité car ils simplifient considérablement l'analyse de circuits constitués de dipôles linéaires.

Définitions A tout couple de nombres réels (a,b) on peut faire correspondre un nombre complexe unique

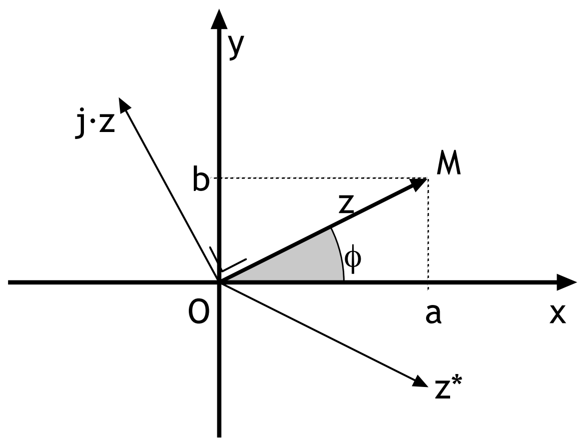
$$\underline{z} = a + jb$$

tel que $j^2 = -1$. Les variables complexes sont désormais notées en souligné. On appelle :

- **partie réelle de** $\underline{z}$: le nombre réel $\mathrm{Re}\,\underline{z} = a$
- **partie imaginaire de** $\underline{z}$: le nombre réel $\mathrm{Im}\,\underline{z} = b$
- **module de** $\underline{z}$: la quantité $\rho = |\underline{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- **argument de** $\underline{z}$: l'angle $\phi = \angle\underline{z}$ (parfois aussi noté $\arg\underline{z}$) tel que $\tan\phi = b/a$
- **complexe conjugué de** $\underline{z}$: le nombre complexe $\underline{z}^* = a - jb$

Comme dans les fonctions trigonométriques, l'argument n'est défini qu'à un facteur 2π près et s'exprime en radians.

Il est commode de réprésenter un nombre complexe $\underline{z} = a + jb$ dans le plan par un point M de coordonnées $(x = a, y = b)$. Le module du vecteur $\overrightarrow{OM}$ équivaut alors au module du nombre $\underline{z}$ alors que l'angle que fait le vecteur $\overrightarrow{OM}$ avec l'axe des abscisses équivaut à l'argument ϕ du nombre $\underline{z}$.



Multiplier un nombre complexe $\underline{z} = a + jb$ par j revient à faire un rotation de $\pi/2$ de ce vecteur. En effet, $j\,\underline{z} = j(a + jb) = -b + ja$. Prendre le complexe conjugué revient à prendre le symétrique par rapport à l'axe des abscisses.

Opérations arithmétiques Les opérations arithmétiques s'effectuent séparément sur les parties réelle et imaginaire des nombres complexes. Si $\underline{z}_1 = a_1 + jb_1$ et $\underline{z}_2 = a_2 + jb_2$, on peut définir

- **addition** : $\underline{z}_1 + \underline{z}_2 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)$
- **soustraction** : $\underline{z}_1 - \underline{z}_2 = (a_1 - a_2) + j(b_1 - b_2)$
- **multiplication** : $\underline{z}_1 \underline{z}_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + j(a_1 b_2 + a_2 b_1)$
- **module au carré** : $\underline{z}_1 \underline{z}_1^* = a_1^2 + b_1^2 = |\underline{z}|^2$
- **division** : $\frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2} = \frac{\underline{z}_1 \underline{z}_2^*}{\underline{z}_2 \underline{z}_2^*} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + j(a_1 b_1 - a_2 b_1)}{a_2^2 + b_2^2}$

Notation exponentielle En électronique, il est souvent plus commode de représenter les nombres complexes en termes d'exponentielles, sachant que

$$e^{j\phi} = \cos\phi + j\sin\phi$$

On en tire que

$$\underline{z} = \rho e^{j\phi} \quad \text{et} \quad \underline{z}^* = \rho e^{-j\phi}$$

et

$$a = \rho\cos\phi \quad \text{et} \quad b = \rho\sin\phi$$

Notons enfin que $e^{j\pi/2} = j$, $e^{j\pi} = -1$ et $e^{j3\pi/2} = -j$.

Le recours à la notation exponentielle (ou polaire) simplifie considérablement le calcul des produits et des divisions. En effet, pour deux nombres complexes $\underline{z}_1 = \rho_1 e^{j\phi_1}$ et $\underline{z}_2 = \rho_2 e^{j\phi_2}$ on peut écrire

- **multiplication** : $\underline{z}_1 \underline{z}_2 = \rho_1 \rho_2 e^{j(\phi_1 + \phi_2)}$
- **module au carré** : $\underline{z}_1 \underline{z}_1^* = \rho_1^2$
- **division** : $\frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2} = \frac{\rho_1 e^{j\phi_1}}{\rho_2 e^{j\phi_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{j(\phi_1 - \phi_2)}$
- **élévation à une puissance** : $\underline{z}_1^n = \rho_1^n e^{jn\phi}$

Autrement dit, multiplier entre eux deux nombres complexes revient à faire le produit de leurs modules et la somme de leurs arguments. Les diviser revient à faire le rapport des modules et la différence des arguments. Pour les additions et les soustractions, en revanche, il est préférable de recourir à la notation standard $\underline{z} = a + jb$.

Lien avec la physique Dans une expérience, on ne mesure jamais des nombres complexes. Seuls les nombres réels ont un sens. Toutefois, et par abus de notation, on représentera souvent des quantités physiques (courant, tension, ...) par des nombres complexes. Cela sous-entend que seule la partie réelle de ces nombres nous intéresse. La complication du formalisme qui en résulte est largement compensée par la simplification des calculs.